7. Aufgabenblatt: Analysis 1

Lehrkräfteweiterbildung, 14 Q, Sommer 2025

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 7.1 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (falls existent).

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}, & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - 2x + 3}{x^3 - 2}, & 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^4 - 16}, \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}, & 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x| - 3}{x - 3}, & 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{3x^2 - 5x}. \end{array}$$

Aufgabe 7.2 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $p \in \overline{D}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q > 0.$$

Zeigen Sie: Es gibt ein $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in D \cap U_\delta(p)$.

Aufgabe 7.3 Zeigen Sie, dass folgende Funktionen im Punkt $p = 0$ stetig sind.

$$\begin{array}{l} 1) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ für } x \neq 0, \text{ und } f(0) = 0. \\ 2) g : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ für } x \neq 0, \text{ und } g(0) = \frac{1}{2}. \\ 3) h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{\exp(x^2)-3x}{1+(\cos x)^2}. \end{array}$$

Aufgabe 7.4

1) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist folgende Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $p = 1$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^5-1}{x^2-1} & \text{für } x \neq 1, \\ a & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

2) In welchen Punkten ist folgende Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig?

$$g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{für } x < 0, \\ 1 - x^2 & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ -2\sqrt{x} & \text{für } 2 \leq x. \end{cases}$$